

向量优化中的变分模型与集值分析^{*}

陈光亚 汪寿阳

(数学与系统科学研究院 北京 100080)

摘要 介绍了在向量优化理论与变分分析方面的研究工作中取得的一批得到国际同行好评的研究成果。该成果 2000 年获“ISI 经典引用奖”, 2001 年获中国科学院自然科学奖一等奖。

关键词 向量优化, 变分分析, 集值分析

80 年代, 我们在向量优化研究中提出了一个新的非控解概念。为了刻画新的解概念, 率先提出了变动偏序下的向量变分不等式和向量互补问题的数学模型, 并证明了解的存在性, 讨论了它们与向量优化问题之间的等价关系。目前, 向量变分不等式和向量互补问题的研究在国际上已成为一个引人注目的研究方向, 一些国际同行在跟踪我们的研究^[1,2]。我们研究论文被国内外同行大量引用, 并于 2000 年获“ISI 经典引用奖”(ISI Citation Classic Award)。2001 年获中国科学院自然科学奖一等奖。

Arrow-Blackwell-Barankin 稠密性定理是向量优化问题标量化的理论基础。多年来, 不少学者试图对无穷维空间建立相应的结果。我们给出了在局部凸拓扑空间与弱收敛意义下的广义 Arrow-Blackwell-Barankin 稠密性定理。该结果奠定了无穷维空间向量优化问题标量化的理论基础^[3]。

80 年代中期, Corley 率先研究集值优化问题, 利用集值函数的 Aubin 相依导数给出了集值优化问题的解的一个必要性条件和一个充分性条件。但是, 他的必要性条件与充分性条件并不是统一的。多年以来, 人们试图给出一个统一的必要性与充分性条件。90 年代中期, Jahn J. 利用他定义的上图相依导数给出了一个统一的必要性和充分性条件。然而 Jahn 定义的上图相依导数在一般的框架下是不

存在的。我们与 Jahn 合作定义了一种新的相依导数, 这种相依导数在一般的偏序拓扑空间中是存在的, 并成功地利用它建立了集值优化问题的解的统一的必要性与充分性条件^[4]。

Ekeland 变分原理是处理优化问题和非线性分析中许多问题的一个有力工具。90 年代初它被推广到三种不同的向量形式。我们给出了一个广义 Ekeland 变分原理, 并证明国际上存在的三种不同形式的向量 Ekeland 变分原理只是它的特殊情况。用我们的广义 Ekeland 变分原理可以有效地解决集值优化中的一些基本问题。我们还建立了 Caristi-Kirk 的不动点定理, Flower Petal 定理和 Drop 定理的向量形式, 并证明它们之间的等价关系。这些工作为非线性向量值分析提供了有力的分析工具。我们还首次建立了集合值映射的广义变分原理, 为集值分析以及集值优化的近似分析开拓了一个新的研究方向^[5,6]。

我们在较弱的条件下给出了向量映射的极大极小定理, 部分地解决了 Fero 提出的一个公开问题。我们还率先建立了集值映射的极大极小定理, 该工作被国际同行评价为“原始创新”(“new and original”)^[7,8,9]。

择一性定理是优化理论研究的一个基本工具, 对于集值映射如何建立择一性定理是一个非常基

^{*} 收稿日期: 2001 年 10 月 19 日

础性的研究课题。我们率先提出了集值映射的择一性定理,并应用它去研究集值优化的最优性条件及 Lagrange 对偶理论等。这些结果推动了国际同行在这个领域的大量后续研究^[10,11]。

参考文献

- 1 Giannessi F. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- 2 Chen C Y, Yang X Q. Vector Complementary Problems and Its Equivalence With Weak Minimal Element in Ordered Space. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1990, 153: 136– 158.
- 3 Chen G Y. Generalized Arrow-Barankin-Blackwell Theorems in Locally Convex Spaces. Journal of Optimization Theory and Applications, 1995, 84: 93– 101.
- 4 Chen G Y, Jahn J. Optimality Conditions for Set-Valued Optimization Problems. Mathematical Methods of Operations Research, 1998, 48: 187– 200.
- 5 Chen G Y, Huang X X. Ekeland's Variational Principle for Set-Valued Mappings. Mathematical Methods of Operations Research, 1998, 48(2).
- 6 Chen G Y, Huang X X. A Unified Approach to the Existing Three Types of Variational Principles for Vector-Valued Functions. Mathematical Methods of Operations Research, 1998, 48: 349– 357.
- 7 Chen G Y. Generalized Sion Theorem and Minimax Inequality for A Vector-Valued Mapping. Optimization, 1991, 22: 745 – 754.
- 8 Li Z F, Wang S Y. A Type of Minimax Inequality for vector-valued Mappings. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1998, 60(4).
- 9 Li Z F, Wang S Y. A Minimax Inequality for Vector-Valued Mappings, Applied Mathematics Letters, 1999, 12(5).
- 10 Li Z F, Wang S Y. Lagrange multipliers and saddle points in Multiobjective Programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 1994, 83(1).
- 11 Wang S Y, Wang Q, Romanó-Rodriguez S. Optimality Conditions and an Algorithm for Nonlinear Bilevel Programming. Optimization, 1994, 31(2).

Variational Models and Set-valued Analysis in Vector Optimization

Chen Guangya and Wang Shouyang

(Academy of Mathematics and Systems Science, CAS, 100080 Beijing)

We have proposed firstly the vector variational inequality with variable partially ordering and the vector complementarity problem in the world. These mathematical models have become a new research direction in optimization theory field. We establish the Minimax inequalities for vector-valued and set-valued mappings. These work answer partially an open question by Ferro, an Italy mathematician. We obtain an unified necessary and sufficient optimality condition. For set-valued optimization problems, by using original contingent derivative of set-valued maps, we establish the vector versions and set-valued versions of Ekeland's variational principle, Caristi-Kirk fixed point theorem, Flower Petal theorem and Drop theorem and prove the equivalence among these theorems. We establish firstly the alternative theorem of set-valued optimization problems. Due to these research works we win "ISI Citation Classic Award" and First Class of National Science Award of CAS.

陈光亚 男,中国科学院数学与系统科学研究院研究员。1962年毕业于四川大学数学系。曾担任澳大利亚 Mulbourne 大学、意大利 Pisa 大学和香港理工大学访问教授或访问研究员,国际重要期刊 *Mathematical Methods of Operations Research* 的客座主编(Guest Editor)。于 2000 年获美国"ISI 经典引文奖",2001 年获中国科学院自然科学奖一等奖。