

粘性流体力学研究的若干进展

高 智*

(力学研究所 北京 100080)

摘要 文章简要介绍了边界层和多层边界层理论研究的进展,着重介绍粘性流动扩散抛物化理论、扩散抛物化方程组和算法以及相关课题研究的若干进展。

关键词 粘性流体力学,扩散抛物化理论,有限差分算法

1 边界层和多层边界层理论研究进展

粘性流体力学是一门包含着丰富物理现象且应用领域众多的基础学科。薄边界层概念和边界层方程组理论(Prandtl, 1904)是继无粘流动 Euler 方程组理论(1752—1755)和粘性流动(Navier—Stokes, NS)方程组理论(1821—1845)之后,流体力学研究的一项划时代进展,它揭开了粘性流体力学的新时代,也标志着近代力学的形成。在人们完全不可能求解具有工程价值的粘性流动基本 NS 方程组之前,边界层理论正确地预测了摩阻和热传导率,使人类的飞行事业至少提前了半个世纪。边界层理论关于边界层和无粘外流渐近匹配求解全域流场的方法也导致了应用数学中有名的渐近匹配方法的形成和发展,并迅速在其它学科找到了广阔的应用领域。边界层理论经过半个多世纪的研究和发展,取得了极其丰硕和完美的系统成果,成为粘性流体力学及其应用领域的一个核心内容。

粘性流体力学研究在本世纪又取得两项意义重大的突破性进展。一项是多层边界层理论和干扰边界层理论(Lighthill, Stewartson),多层边界层理论(例如 Triple—deck 理论)揭示了边界层自诱导分离沿流向和法向具有渐进性质的小尺度结构,阐明了边界层分离的流动机理,提出和发展了同时沿流向和法向渐近匹配的数值方法等,得到的关于边界层分离点和尾缘点等流动关键点附近流场的数值结果,至今仍具有基准(benchmark)解的意义。在近 40 年(从本世纪 50 年代到 80 年代)的时期内,多层边界层理论(包括层流和湍流)取得了丰硕的系统成果,成为粘性流动局部区域理论的又一个典范。

2 扩散抛物化理论和扩散抛物化(DP)方程组研究进展

粘性流体力学研究本世纪另一项意义重大的突破性进展是扩散抛物化(DP)方程组理论(Davis, 高智, Толостых),DP 方程组文献上亦称简化 NS、抛物化 NS、薄层 NS 和扩散抛物化 NS 方程组等。扩散抛物化(DP)方程组理论其实已超出了边界层理论的范畴,它为传统方法

* 力学研究所研究员

收稿日期:1998 年 3 月 6 日

(即边界层与无粘外流匹配求解方法)难以解决的众多难题提供了新的求解途径,开辟了流体力学理论和计算的新领域。DP 方程组作为流体力学的一种基本方程组已得到广泛应用,求解它的数值方法与求解 NS 方程组和求解 Euler 方程组的数值方法在有关专著中已成为并列的独立内容,它也必将成为粘性流体力学及其应用领域的一个核心内容。

(1)粘性流动扩散抛物化(DP)理论。若任一方向(例如 x 方向)上粘性扩散的迎风特征距离 d_x 小于所研究问题在该方向上的特征长度 l_x , 则在该方向上可近似忽略粘性扩散的贡献,即可在流体运动方程中略去对 x 的粘性导数项;若 d_x 与 l_x 可相比较,则运动方程中对 x 的粘性导数项与惯性项同等重要,这就是粘性流动扩散抛物化(DP)理论(高智,1988)。DP 理论的一个推论是:若在一个或两个坐标方向上 DP 理论成立,NS 方程组简化为扩散抛物化(DP)方程组;若在 DP 方程组中进一步丢掉小量阶项,得到边界层方程组;若在所有坐标方向上 DP 理论成立,NS 方程组简化为 Euler 方程组。可见扩散抛物化理论相对薄边界层理论概念上有突破,DP 理论包括边界层理论、多层边界层理论和无粘近似理论为它的特例,DP 理论的尺度数量级关系分析导致 NS 方程组的系统简化,从而把高雷诺数流动的主要近似理论和相应方程组统一为一个有机整体。

(2)扩散抛物化(DP)方程组的形式和 NS 方程组简化的层次结构。DP 方程组是一类方程组含有一些不同的形式,这与 NS 方程组、Euler 方程组和边界层方程组的形式唯一有很大的不同。事实上从 DP 理论的尺度数量级关系出发,NS 方程组按照方程中诸项数量级大小的简化形成了层次结构,在 NS 方程和边界层方程之间或 NS 方程和 Euler 方程之间包含了许多层次,特别是对曲线坐标系和可压缩流包含的层次更多,每一层次有自己的运动方程组,这诸多层次的诸多方程组构成了一类 DP 方程组(高智,1987)。

对于流动细致过程的描述,对于流场关键点(例如边界层分离点和驻点)流动过程的描述,不同形式的 DP 方程组会给出区别显著的不同结果。例如在平直壁和弯曲壁边界层分离点邻域,Davis 形式和 Головачев 形式的 DP 方程组与边界层方程组一样存在 Goldstein 数学奇异性,切向流速梯度和法向流速在分离点均趋向无穷大;而高智形式 DP 方程组则与 NS 方程组一样在分离点邻域存在级数解,数学上为“正则”。Головачев DP 方程组(Головачев,1973)包含的粘性项与边界层方程组中的粘性项完全一致,高智形式 DP 方程组(高智,1967)在切向和法向动量方程中均包含主要的粘性项,Davis DP 方程组(Davis,1964 和 1970)包含的粘性项介于高智和 Головачев DP 方程组的粘性项之间。又如检验 DP 方程组优劣的最佳判据是准确解试验,对 8 类熟知的 NS 方程组准确解:即不可压缩二维和三维驻点流动、Couette 流动、旋转圆盘附近的流动、Poiseuille 流动、收缩和扩张渠道流动、层流射流流动和旋转圆盘之间的流动等,Davis DP 方程组解以及 Головачев DP 方程组解只有 Couette 流与 NS 方程组准确解一致,其它 7 类均不一致;而高智 DP 方程组解对 8 类流动均与 NS 方程组准确解完全一致,特别是在扩张渠道流动出现分离的条件下高智 DP 方程组解仍与 NS 方程组准确解一致等。因此在 DP 方程组的所有可能的形式中,高智形式 DP 方程组最为合理。

(3) DP 方程组的数学特征。数学特征分析表明 DP 方程组为双曲抛物型,这是流体力学家和计算流体力学家在 60—70 年代的共同看法,抛物化 NS 方程组的称呼反映了这一事实。数值计算的实践最先否定了上述结论。DP 方程组数学特征的完整理论是特征和次特征理论(高智,1986),特征由 DP 方程组所含高阶导数项组成的主部所规定,次特征由 DP 方程组在

粘性极限 $\mu \rightarrow 0$ 下的蜕化方程组即 Euler 方程组所规定。DP 方程组的数学特征由特征和次特征共同决定。特征表明 DP 方程组为双曲抛物型,次特征表明 DP 方程组当马赫数 $M > 1$ 时为双曲型、而当 $M < 1$ 时为椭圆型,因此 DP 方程组当 $M > 1$ 时为双曲抛物型,而当 $M < 1$ 时为椭圆型。十分有趣的是,特征和次特征分析表明边界层方程组均为抛物型,边界层方程组因此是“真正的”抛物化方程。特征表明 NS 方程组为椭圆型,次特征表明 NS 方程组当 $M > 1$ 时为双曲型、而当 $M < 1$ 时为椭圆型,因此 NS 方程组为“真正的”椭圆型。

(4) 对流粘性扩散竞争尺度结构。粘性流动对流扩散相竞争即粘性力与惯性力相竞争的尺度结构问题是一个十分重要的问题。事实上边界层理论揭示了流场中存在法向竞争小尺度结构, Triple-deck 理论揭示了在流向和法向同时存在对流扩散竞争小尺度结构,从而找到了求解边界层和多层边界层流动的正确途径并导出边界层方程组。DP 理论揭示了流场中普遍存在的对流扩散竞争小尺度结构,从而找到了求解粘性流动的正确途径并导出 DP 方程组、边界层方程组及 Euler 方程组。

对流粘性扩散竞争尺度结构不变性诸定理(高智,1992)是粘性流体力学研究十分重要的进展。竞争尺度结构不变性定理表明,基本流动与其线性化和非线性扰动流存在同一对流扩散竞争尺度结构。该定理对流体运动稳定性研究无疑具有重要的意义和应用。例如不变性定理为流动线性化稳定性原理的两个约定从竞争尺度结构的角度提供了理论依据;非线性方程(系统)的线性化稳定性原理的两个约定(Nicolis-Prigogine,1986)是:(i)若非线性方程的线性化方程之零解是渐近稳定的,则非线性方程是渐近稳定的,且零解为其渐近稳定解;(ii)若非线性方程的线性化方程之零解是不稳定的,则非线性方程是不稳定的,零解是其不稳定解。又如不变性定理也为流体运动稳定性研究的新方法即 PSE(Parabolized Stability Equation)方法提供了理论依据,在流动稳定性问题中基本流动在流向方向上通常满足 DP 理论,即描述基本流动的 NS 方程组可简化为 DP 方程组。由不变性定理推知,线性化和非线性扰动方程组在流向方向上同样可以扩散抛物化,由此得到抛物化稳定性方程(PSE)。PSE 的上述导出方法的意义在于:扰动量空间分布极不均匀,因此根据扰动场分析来决定扰动量梯度项的取舍,道理并不充分;然而若不把扰动量方程抛物化,数值计算就会复杂化,例如流向下游边界条件的设置就是一个大难题。

(5) 对流热传导(或能量守恒)方程和质量输运(或组分守恒)方程的扩散抛物化。粘性扩散抛物化理论的两个推论是:若在主流方向(例如说 x 方向,或 x 方向和 z 方向),热和质量扩散的迎风特征距离小于所研究问题在主流方向上的特征长度,则热和质量扩散抛物化理论成立,热传导和质量输运方程中可丢弃对 x 或对 x 和 z 的热与质量扩散导数项。对流热传导方程和质量输运方程扩散抛物化的意义十分清楚,例如解决了规定流向下游边界条件的难题等。值得指出,对 NS 方程组计算,如何规定流向下游边界条件同样是困扰人们的一个难题。DP 理论为该难题的解决提供如下原则:流向下游边界上应规定“自由”对流输运条件,联想到流动稳定性计算的抛物化稳定性方程(PSE),看来这一原则具有普遍意义。

(6) 湍流扩散抛物化理论和湍流扩散抛物化(TDP)方程组。导出 TDP 方程组的途径有好几种,一种是利用有效粘性系数 $\mu_{\text{eff}} = \mu_l + \mu_t$ 代替层流粘性系数 μ_l ,则 TDP 方程组的形式与层流 DP 方程组的形式完全一致(Baldwin-Lomax,1978),这里 μ_t 为湍流粘性系数。另一种是简化时间平均雷诺方程组(Reynolds,1895)和简化空间滤波大涡模拟(LES)方程组(Smagorin-

sky, 1963)。第三种途径是对 DP 方程组作时间平均运算和作空间滤波运算。由于导出途径的不同, TDP 方程组的形式亦有不同。把不同形式 TDP 方程组中的湍流粘性项作比较, 不仅对 TDP 方程组形式的合理选择有意义, 也为湍流粘性项本身提供了不少建设性意见(高智, 1992)。

TDP 方程组与 Reynolds 方程组和 LES 方程组一样是不封闭的, 必须补充经验湍流应力模式。我们不知道有效粘性系数 μ_{eff} 的具体表达式和它的确切数量大小; 然而经验告诉我们, 在流向方向上湍流扩散的迎风特征距离 d_i 通常是小于所研究问题在流向方向的特征长度, 因而在该方向上可忽略有效粘性(分子粘性加湍流粘性)扩散的贡献, 这是湍流扩散抛物化理论, 可见 TDP 方程组有坚实的物理基础。TDP 方程组的重要意义在于: 对湍流全域流场计算, TDP 方程组把粘性项的数目减少到了最少, 即数目与湍流边界层方程组中粘性项的数目大体相当, 因此 TDP 方程组对湍流工程计算具有重要的应用价值。

(7) 层流 DP 方程组解的存在唯一性。在固壁上满足粘附条件和流动进出口给定法向力的边界条件下, DP 方程组解存在唯一性条件与 NS 方程组解存在唯一性条件一致(高智等, 1994), 区别是满足存在唯一性不等式的雷诺数的数值略有不同。

3 粘性流数值方法研究的若干进展

(1) 求解 DP 方程组的数值方法。求解 DP 方程组特别是求解可压缩流 DP 方程组的数值方法研究, 近 30 年来取得了许多重要进展, 提出了众多有效的数值方法, 主要的如: 隐式近似因子分解法即 AF 方法(Beam - Warming, 1975), 矢通量分裂方法(Steger - Warming, 1979), MacCormack 显式、显隐式和有限体积格式等, 这些数值方法可用于求解 DP 和 TDP 方程组, 也可用于求解 NS 方程组及其湍流形式。求解 DP 方程组的时间相关计算与求解 NS 方程组的时间相关计算相比, 主要是前者避免了对本来就算不清楚和算不出来的许多粘性小量阶项进行计算(Lomax - Mehta, 1984), 同时也减少了未知的湍流粘性项。

DP 方程组在马赫数 $M > 1$ 时为双曲抛物型, 因此对于超声速和高超声速定常流动计算, 可用定常 DP 方程组空间推进方法求解。定常 DP 方程组空间推进求解与定常 NS 方程组时间推进求解相比, 具有计算维数减少一维的突出优点, 大大节省了运算量和存储量。因此在本世纪 60—70 年代, 定常 DP 方程组的空间推进求解倍受重视, 发展了许多很有特色的空间推进数值解法。例如, 求解定常守恒型 DP 方程组的隐式空间推进格式和显隐式 TVD 空间推进格式(王汝权等, 1981); 把黎曼间断解的近似解方法(Roe, 1983)用于 DP 方程组的空间推进求解(Lawrence 等, 1986), 改进了空间推进方法捕捉激波的能力, 避免了解通过激波时产生非物理振荡的问题等。但是由于 DP 方程组在亚声速区的椭圆型数学性质, 流场中亚声速流动区的存在使定常 DP 方程组的空间推进计算出现数值发散。

为了解决定常 DP 方程组空间推进算法中遇到的实质性困难, 人们提出把流场分为超声速区、亚声速区和局部复杂流动区的分区域算法; 提出把边界层反解方法的思想用于定常 DP 方程组的空间推进求解(张涵信等, 1990); 更主要的也是更为成功的是提出了非定常 DP 方程组的时间相关空间推进算法, 如时间相关单次空间推进算法(Newsome 等, 1987), 时间相关多次扫描空间推进算法(Lombard 等, 1987), 把单次空间推进算法(用于超声速区)和对称 Gauss - Seidel 松弛算法(用于亚声速区和局部复杂流动区)组合在一起的空间推进叠代组合法

(王汝权等,1995)等。

应当指出,所有利用差分方法以及利用有限元和边界元等方法计算高和中等雷诺数流动的研究,不是求解 NS 方程组就是求解 DP 方程组;计算无粘流动则是求解 Euler 方程组,因此可称为求解某种流体运动方程组的流动计算策略(简称为流体方程计算)。另一种耦合离散流体理论的流动物理计算策略(高智,1997)也取得了开拓性的初步进展。

(2) 离散单元流动的流体理论和耦合离散流体理论(CDFT)的算法。由于粘性流动的非线性和非均匀特性,对任一空间离散划分,不同离散单元流动的特征并不相同,因此提出了离散单元流动的流体理论(高智,1997):若相邻节点之间的距离 Δx 足够大于节点处扩散输运在节点连线方向上的迎风特征距离 d_x ,则节点物理量近似不受该方向上的下游节点物理量的影响。因此可称为流动离散的对 d_x 流化理论,它显然是流体运动微分方程 DP 理论在流动离散条件下的配对理论。若 Δx 足够小于 d_x ,则上、下游相邻节点物理量对计算节点物理量具有同等的贡献。 Δx 与 d_x 组成无量纲参数即步长雷诺数 $R_{\Delta x}$ 或步长 Peclet 数 $P_{\Delta x}$ 等。当 $R_{\Delta x} \geq R_p = 2$ 或 3, Δx 即达到足够大的要求。这意味着仅在顺流方向上网格节点数就要求达到雷诺数 R 。大小,对高 R 数(例如 $R_e = 10^7$) 流动计算这无疑是很苛刻的要求。可见离散单元流动流体理论具有重要的理论意义和应用价值。应当强调,离散流体理论有待发展和完善,例如需要引入刻画离散流动特征的其它无量纲参数,而在离散尺度层次上直接建立湍流数值模型的课题无疑具有重大意义和挑战性。

对粘性流动的每一离散单元,根据离散流体理论构造该单元的差分格式(简称物理自适应 PA 格式),再把所有离散单元的 PA 格式缝缀在一起即是耦合离散流体理论(CDFT)的差分格式(高智,1997),这种计算称为流体物理计算。CDFT 差分格式的具体形式自然有很多,但不同形式 CDFT 差分格式具有如下的共同特点:若所有三个坐标方向上的步长雷诺数 $R_{\Delta x}$ 都大于 $R_p (=2 \text{ 或 } 3)$,则 CDFT 格式的等价微分方程为 Euler 方程组;若有的 $R_{\Delta x} > R_p$,有的 $R_{\Delta x} \leq R_p$,则 CDFT 格式的等价微分方程为 DP 方程组;若所有 $R_{\Delta x} \leq R_p$,则 CDFT 格式的等价微分方程为 NS 方程组。因此从流体物理计算 CDFT 格式的角度来看,NS 方程组、DP 方程组和 Euler 方程组三者地位等同。

CDFT 格式的建立应根据具体离散单元流动(特别是对湍流)的具体分析来建立;一个简便的方法是把 CDFT 开关函数作用于 NS 方程组的任一合理的差分格式上获得 CDFT 格式。流体物理计算的一个数值实验,即利用一阶和二阶两种迎风格式、两种二阶 TVD 格式、三阶 ENO 格式和五阶加权 ENO 格式以及它们相应的六种 CDFT 格式计算 Burgers 模型方程的数值实验表明:六种 CDFT 格式的数值结果均比相应原始格式的结果更精确,且运算量亦有所减轻;利用二阶 TVD 格式及相应 CDFT 格式计算激波边界层干扰流动的数值实验同样获得与实验测量相符合的满意结果等。可见对计算精度和计算效率的提高,对具体单元流动作具体分析的流体物理计算策略要比常用计算策略,即在流体方程计算中施展数学技巧(改进差分格式形式和提高格式精度)更有效。应当指出,CDFT 格式计算不存在区域分裂算法中出现的区域覆盖、边界匹配等问题,但提出了相容性、稳定性和收敛性等基本课题。

4 结束语

扩散抛物化理论是流体力学的一个基本理论,它包容了边界层、多层边界层和无粘近似等

理论且导致 NS 方程组的系统简化,导出了扩散抛物化(DP)方程组;该理论在其它有关领域亦有重要的应用。DP 方程组是介于 NS 方程组和 Euler 方程组之间,且数学特征与 NS 方程组数学特征不同的一类粘性方程组。不论从流体运动微分方程近似的角度还是从流体有限离散数值近似之等价微分方程的角度,DP 方程组均是与 Euler 方程组和 NS 方程组同等重要的流体力学基本方程组。

层流和湍流 DP 方程组与 NS 方程组及其湍流形式相比,粘性项少了许多,但保留了必要的分子粘性项和湍流粘性项,因此对高雷诺数流动计算形成了求解 NS 方程组、求解 DP 方程组和求解 Euler 方程组的流体方程计算的并列领域。离散单元流动的流体理论,特别是湍流理论,对粘性流有限离散数值模型的完善具有基础意义;耦合离散流体理论的算法在离散尺度层次上实现了对具体离散流动具体处理的流体物理计算,可更好地逼近流动真实情况,因此在发展流体方程计算的同时发展流体物理计算很有必要和好处,有助于计算流体力学和粘性流体力学及其应用计算的发展。

参考文献

- 1 高智.论简化 Navier-Stokes 方程组.中国科学(A 辑),1987,(10):1058.
- 2 高智.简化 Navier-Stokes 方程组的层次结构及其力学内涵和应用.中国科学(A 辑),1988,(6):625.
- 3 高智.二维剪切流的粘性—无粘湍流干扰理论.中国科学(A 辑),1992,(6):605.
- 4 D. Anderson et al. Computational Mechanics and Heat Transfer. New York: Hemisphere, 1984.
- 5 S. G. Rubin, J. C. Tannehill. Parabolized/Reduced Navier-Stokes Computational Techniques. Ann. Rev. Fluid Mech., 1992, (24): 117.