

* 学科发展 *

几何定理机器证明研究展望

张景中*

(成都计算机应用研究所 成都 610041)

摘要 几何定理的机器证明在自动推理的研究中占有重要的地位。今后 10 到 20 年间,几何定理机器证明的传统化,几何作图问题的机器求解,几何不等式的机器证明和自动生成,微分几何的机器证明,将有显著的进展。几何问题机器求解的研究成果,会在实际应用中发挥更大的作用。

关键词 几何定理,机器证明,研究

1 几何定理机器证明研究的巨大进展

近 20 年来,几何定理机器证明的研究和实践,有了很大进展。

能否建立一个通用的几何解题方法,成批地解决问题,这是历史上一些卓越科学家的梦想。为此,笛卡尔、莱布尼兹、希尔伯特等科学巨匠虽曾付出心血,但未能找到有效的途径。计算机的出现大大促进了这一领域的研究。50 年代,塔斯基用代数方法证明了初等几何机械化的可能性。接着,格兰特等提出用逻辑方法建立几何推理机,科林斯等改进了塔斯基的方法。但直到 1975 年,仍找不到能用计算机判定非平凡几何命题的有效算法。正当这一领域的热情由于进展缓慢而趋于冷落之际,吴文俊方法的提出,给定理机器证明的研究带来了勃勃生机。用吴法可在微机上很快地证明困难的几何定理。周咸青发展了吴法并把它实现为有效的通用程序,证明了 512 条非平凡定理。这一进展是自动推理领域一大突破。被国际同行誉为革命性的工作。

吴法的成功使新的代数方法接连出现。在国外,周咸青等提出了用 Grobner 基方法构筑几何定理机器证明的算法和程序并得到成功。在国内,洪家威提出了单点例证方法的理论设想,但未能实现。张景中、杨路则提出数值并行方法,在低档微机(甚至计算器)上实现了非平凡几何定理的机器证明和机器发明。数值并行方法的优点是所需内存极小,且易于并行化。这些方法的提出和实现,丰富了几何定理机器证明的研究。但与吴法相比,没有大的新突破。

代数方法不能使人满意的是,它所给出的“证明”是关于大多项式的繁复的计算,人难于理

* 中国科学院院士

收稿日期:1996 年 12 月 23 日

解其几何意义,也难于检验其是否正确。一些著名的科学家认为,机器证明的基本思想是以量的复杂取代质的困难,这就很难想象用机器生成可读证明。国外一些学者从 60 年代即致力于几何定理可读证明自动生成的研究,30 多年来进展不大,未能给出哪怕是一小部分非平凡几何定理的机器证明的有效算法和程序。

作者以多年来所发展的几何新方法为基本工具,提出了消点思想,和周咸青、高小山合作,于 1992 年突破了这一困难,实现了几何定理可读证明的自动生成。这一新方法既不同于代数方法,也不同于传统的综合方法,而是一个以几何不变量为工具,把几何、代数、逻辑和人工智能方法结合起来所形成的一种开放系统。基于此法所编的程序,已在微机上对数以百计的困难的几何定理,完全自动地生成了简短的可读证明,其效率也比其它方法高。随所用的几何量的不同,它能生成面积法、向量法、复数法、全角法等多种形式的证明,也能用于立体几何。杨路、高小山、周咸青与作者合作,把消点法用于非欧几何可读证明的自动生成也得到成功,并得到一批非欧几何新定理。消点法也可用于几何计算和公式推导。基于几何量和消点思想的新原理的建立,也使几何定理机器证明的成果在数学教育中的应用有了现实可能。在寻求计算机能象处理算术那样处理几何的前进道路上,这一成果被国际同行誉为一个里程碑,是自动推理领域 30 年来最重要的工作。

在多数情形下,消点法也可用笔纸证明不平凡的定理。它结束了两千年来几何证题无定法的局面,把初等几何解题法从四则杂题的层次推进到类似于代数方程解应用题的阶段。

2 几何定理机器证明与人工证明的比较

几何学家常用下列四种手段:

(1) 检验:对具体图形作观察和计算,以确定命题。

(2) 搜索:依据常用的引理和已知条件去找寻题图中更多的几何性质。这样做如达不到目的,得到的信息就是进一步工作的基础。

(3) 归约:从结论出发,利用已知信息消去依赖的几何量或几何元素,使结论的真假趋于明显或易于检验。

(4) 转化:改变命题的形式。如几何变换、反证法、辅助线等。

手段(1)的机器模拟已经实现。手段(3)的机械化研究得到了最大的成功。吴法、GB 法、面积法和向量法均属此类。手段(4)充分体现了人的思维活动的灵活性与丰富性,尚难以机械化。手段(2)的搜索,是传统几何证明活动中的常规方法,是归约的补充和转化的基础。我们基于前推模式设计并实现了一个“几何信息搜索系统”(GISS)。由于适当地选择几何工具,合理地组织数据和优化推理的过程,效果极好。文献中曾提出的用搜索法处理涉及圆的命题,以及找出所有可能推出的几何性质(达到推理不动点)的问题,均为我们的算法完满回答。我们的程序用 C 语言在 NEXT 工作站上实现,用于 161 个非平凡几何命题,均在合理的时间内达到不动点,并能发现新定理,证得其它方法不能证明的结果。程序已具有添加某些辅助线的功能。

几何定理的人工证明,具有计算机无法比拟的灵活性和创造性。但只要把某一类型的人工证明方法的内在的规律性挖掘出来,作为有效的算法,借助于计算机快速、准确的特点,便能发挥出机器证明的强大威力。把人工证明的一类方法发展为计算机能有效执行的一种算法,是极

为艰难的创造性过程。从坐标方法到吴法,从古老的面积方法到可读证明自动生成的消点法,从人人都能想到的“大英百科全书”式的搜索式推理到 GISS 最近的实现,使我们认识到这条道路尽管漫长而曲折,却不失为一条通向成功之路。

3 最新进展和研究展望

综观近 20 年来几何定理机器证明的进展,可归为三点:一是基于坐标的代数方法的成功,二是基于几何不变量的消点法的建立,三是基于传统综合证明方法的几何信息搜索系统的实现。看来,这三者也正是几何定理机器证明研究进一步发展的生长点。

3.1 关于代数方法的研究

机器生成可读证明的实现并不会使代数方法失去价值。一些特殊问题及代数曲线、曲面的几何问题仍需用代数方法。代数方法与非线性代数方程组的理论和符号求解密切相关,有广泛应用价值,是自动推理的一大热点,也是国家攀登项目“机器证明及其应用”(在“九五”期间更名为“数学机械化及其应用”)的核心课题之一。虽已有了吴法、GB 法等优秀的代数方法,但道高一尺,魔高一丈,更难的问题要求发展更有力的新方法。最近,符红光编写了代数方程组符号求解和机器证明的程序,比已知各法有更好的效果。此法能在 PC486 机上解六变量循环方程,反解多种类型的六关节机器人问题,这是其它方法在一般工作站上做不到的。为了解决更复杂的几何问题,发展非线性代数方程组的并行插值求解方法是一个有希望的方向。

代数方法研究的又一新进展是杨路等提出的实系数代数方程的完全判别式系统。这不但彻底解决了几个世纪悬而未决的实代数的一个基本问题,也使几何不等式机器证明的难题有希望得到突破。几何不等式和几何作图的机器求解,及微分几何、微分方程的机器求解,会随着实代数研究的进展而出现新的局面。

3.2 关于消点法的研究

基于不变量的消点法的建立,已经引出了关于几何定理可读机器证明的一系列成果。近期进一步用 Clifford 代数的语言对面积方法(基于不变量的消点法的基本部分)进行了描述和整理。这一工作在证明的可读性方面似乎退了一步,但使面积方法在数学理论上更具有完整性和统一性,因而是有意义的。这一研究方向的发展,有可能导致更一般的高维几何,以及局部微分几何可读证明自动生成的实现。至于整体微分几何的定理机器证明,目前尚无途径。

消点方法本身也大有改进和发展的余地。一方面可以使用更多的几何不变量,把消点法应用范围扩大,使它能用于更多命题和更多种的几何。另一方面,由于基本的几何对象除了点,还有直线和平面等,所以由消点可以发展到消线、消面、消圆。方法的多样化可以提高证明的质量,并使证明丰富多彩。

消点法不但能证明几何定理,也可用来做几何计算和公式推导,而且并不一定要用计算机来做。多数情形下人用笔和纸也可以有效地进行。人用消点法解题,还可以灵活一点,不像计算机那样刻板。如何发展适于人工执行的消点方法,有没有必要和可能把消点法教给中学的师生,这是数学教学中有意义的研究课题。

3.3 关于几何信息前推搜索的研究

如我们在发展 GISS 时所看到的那样,前推搜索方法能使几何定理的证明更为传统化,还

能搜索出所给几何图形的许多性质,这是几何定理机器证明的其它方法难以做到的。我们所发展的 GISS 程序不过是这个方向的初步成功,在方法和技巧上还有很大的改进余地。

在 GISS 的基础上研究几何问题机器求解的其它方法,这一方向具有诱人的前景。高智能的几何解题方法的机械化,如辅助线、几何变换、合同法和反证法的计算机实现,显然只有在有效的 GISS 的基础之上才能得以发展。而 GISS 本身,则有可能发展为更一般的几何推理数据库,成为几何研究和教学的有用的工具。

几何作图机械化的研究,不但有传统的兴趣,更有广泛的应用价值,目前在国际上是一个很活跃的研究领域。在消点法和 GISS 基础上,发展了一类几何作图问题的求解算法并实现为有效的程序,它对一大类用尺规可解的几何作图问题能自动生成作图步骤和可读证明。这一方向的研究,可说是方兴未艾,有大量的工作可做。

4 应用前景

20 年来的进展,使得几何定理机器证明的研究从基础研究阶段发展到了应用研究和开发研究阶段。几何定理机器证明研究成果的应用,大体有两个方面:

一方面,在各专业技术领域,如机构设计、曲面造型、计算机辅助设计、机器人控制、计算机视觉等领域,经常提出与几何有关的各种问题。这些问题过去常是化成代数方程来解。有了几何定理机器证明的这些新进展,便有可能用几何方法更有效地解决其中的一些困难问题;或利用问题的几何背景,构造更快捷的代数方法。另外,为研究几何定理机器证明而发展出的代数方法,常能成为解决这些实际问题的有用工具。这方面的研究,需要和具体技术领域的工作者密切合作才能顺利进行。有关部门的领导如能花些力量组织或撮合这种跨领域、跨部门的应用研究,其效益不可估量。但这效益主要是对具体技术领域的有关部门而,近期似无形成有关软件产业的可能。

另一方面,应用几何定理机器证明研究的成果或在研究中所形成的思想和方法,可以研究开发出更高智能的理科教育软件和供广大科技工作者、教师与学生使用的数学工具软件。这方面有形成软件产业的现实可能性。事实上,中国科学院成都地奥公司已投资人民币数百万元,与成都计算机应用研究所合作,开始了开发高智能的中学理科教育软件的工作。预计这套软件于 1998 年推出。

数学工具软件能在很大程度上用计算机代替人的高级脑力劳动。好的数学工具软件能产生很大的社会效益,经济效益也是可观的。国外从 60 年代就开始了这种软件的研究开发工作。经过 30 多年的改进和发展,已有几种方便、实用、声誉卓著的商品软件被广泛使用。如我国科教界所熟悉的 MAPLE、MATHEMATICA 等。相比之下,我国虽然在定理机器证明的某些方向具有领先的优势,但这优势尚未转化为实际的力量,在数学工具软件的研究开发方面远远落后于国际先进水平。在攀登项目“数学机械化及其应用”的建议书中,已经把相应的软件研究与开发列为重要内容之一。相信在未来 5—10 年中,我国在几何定理机器证明领域不仅会出现一批高水平的基础研究成果,而且体现我国在这一领域学术水平的优秀软件也将脱颖而出。