

## \* 成果与应用 \*

关于 Steiner 树的 Gilbert-Pollak  
猜想的证明

堵 丁 柱

(应用数学研究所)

“在过去的一年, 数学上的显著进展包括一个关于最短网络的长期著名猜想的解决……”  
(引自《不列颠百科全书 1992 年鉴》), 这个猜想就是关于 Steiner 树的 Gilbert-Pollak 猜想。

这个数学问题要追溯到法国大数学家 Fermat (1601—1665)。他曾经提出了 Fermat 问题: 任给平面上三个点, 如何找出一一点将它与这三个点相连, 使得连线的总长度最小。1640 年 Torricelli 给出 Fermat 问题的解: 当三点组成的三角形最大内角小于  $120^\circ$  时, 所求的点与三个点连线形成的三个角均等于  $120^\circ$  (见图 1)。当最大内角不小于  $120^\circ$  时, 所求的点就是最大内角对应的点 (见图 2)。后来 Simpson 在他的著作《流数》中提出 Fermat 问题的一般形式, 即将三点推广到任意有限点集, 许多著名数学家对此问题进行研究, 其中包括 Steiner。三百年后, Jarnik 和 Kössler 在 1934 年提出了最短网络问题: 如何将平面上  $n$  个点用线段连起来, 使得线段的总和最小。Courant 和 Robbins 在 1941 年他们的名著《什么是数学》中第一次指出 Fermat 问题可以看做是最短网络问题  $n = 3$  的特殊情形, 然而不知什么原因在他们书中既没提到 Fermat, 也没提到 Jarnik 和 Kössler, 而将最短网络问题误称为 Steiner 问题。由于这本书的流行, Steiner 问题引起了广泛的注意和研究。由于最短网络一定是树 (即构成网络的线段不形成圈), 所以 1968 年 Gilbert 和 Pollak 首次将最短网络称之为 Steiner 最小树。值得强调的是, Steiner 最小树可以在给定的点之外再增加若干个 (称为 Steiner 点), 然后将所有这些点连起来。如果不允许增加任何额外的点做为网络的顶点, 这种最短网络称为最小生成树。显然, Steiner 最小树往往会短些。例如, 当给出的三点组成边长为 1 的正三角形时, Steiner 最小树的长为  $\sqrt{3}$ , 而最小生成树的长为 2, 两者之比为  $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ 。也就是说, 添加一个点可以省 13% 的长度。

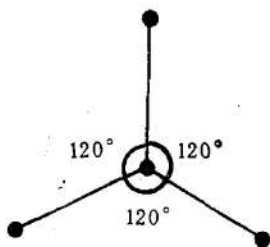


图 1



图 2

虽然最小生成树出现得较晚,可是,自 Kruskal 1956 年发现了求它的有效快速算法之后,人们几乎忘掉了 Steiner 最小树。这种情形持续到 1967 年,直至一个富有戏剧性的事件发生于美国贝尔电话公司中。这事件牵涉到私家网络的问题。当一个大企业有若干分部时,分部与分部之间的电话网络称为私家网络。1967 年前,贝尔公司使用最小生成树原则来收费,收费多少取决于连接各分部的最小生成树的长度。1967 年一家航空公司戳了贝尔公司一个大洞。当时这家企业申请要求贝尔公司增加一些服务点,而这些服务点恰恰位于构造该公司各分部的 Steiner 最小树需增加的 Steiner 顶点上。这样使得贝尔公司不仅要拉新线,增加服务网点,而且还要减少收费。这一意外事件迫使贝尔公司自此以后便采用了 Steiner 最小树原则。而对 Steiner 最小树的研究以及估算新旧原则的差别便是一个自然而重要的问题。1968 年当时贝尔实验室数学中心主任 Pollak 和研究员 Gilbert 提出了如下猜想:对欧氏平面上的任何有限点集,其 Steiner 最小树同最小生成树的长度之比(称为 Steiner 比)不小于  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

1977 年, Garey, Johnson 和 Graham 的结果又为 Gilbert-Pollak 猜想披上了理论外衣。他们证明了求 Steiner 最小树,至少有 NP 完全问题,即几乎没希望找到求 Steiner 最小树的有效算法。对这类问题,研究其可以被多项式时间可算的近似解逼似的程度,是计算复杂性方面的重要课题。近似解与精确解之比的下确界通常称为性能比。我们已知最小生成树是多项式时间可算的,如果把最小生成树看做 Steiner 最小树的近似解,那么 Gilbert-Pollak 猜想相当于说,最小生成树的性能比是  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

在这一猜想出现后的 22 年中,也许源于猜想出现的戏剧性背景,也许源于其理论意义及贝尔实验室的学术威望,也许源于数学家对形式初等而又难解的问题的特殊爱好,人们对 Gilbert-Pollak 猜想的研究兴趣历久不衰。除对三点、四点、五点、六点一步步验证了猜想外,同时把 Steiner 比的下界从 0.5 开始,历经 0.57, 0.76, 0.8, 一直向上推进到 0.824。方法从初等几何论证发展到使用计算机做大规模的计算。但是,现任美国数学会主席 Graham 曾在评价它们时说:“显然,用了错误方法。”

1990 年,笔者与贝尔实验室黄光明研究员合作,找到了一个全新途径,给出了 Gilbert-Pollak 猜想的完整证明。该证明很快就得到了国际上著名科学家和报刊的高度评价。Stewart 教授对这个证明做了如下评论:“这个漂亮的新方法干净利落地处理了一个以前看起来完全难处理的问题,并且去掉了一堆纷乱的计算和从情形到情形的研究,而给出了一个清楚的、概念上简单的解。堵-黄方法并不容易,它需要一定的数学技巧,但是,它是那样的一个戏剧性的改进,从头就淘汰了先前的所有方法。更为重要的是,它提供了一个研究类似问题的范例。……‘思考第一,计算第二’,应该铭记在每位数学家的心中。”该证明于 1990 年 10 月在会议上正式公开,《纽约时报》立刻做了报道。接着《科学》、《科学新闻》、《新科学家》等权威刊物先后做了报道。值得一提的是《SIAM 新闻》还加上了“在计算机时代欧氏几何生机勃勃”做为标题。在《不列颠百科全书 1992 年鉴》的数学评论中,该成果进一步被列为世界上当年六项数学成果的首项。在我国,国家科委和《光明日报》,中央电视台等五家新闻单位将该成果评为 1992 年中国十大科技成果之一。