

# 机械化数学的典范

## ——评吴文俊的专著《几何定理机器证明的基本原理》

王东明 高小山

(系统科学研究所)

1899 年希尔伯特 (Hilbert) 出版了他的经典名著《几何基础》，从此奠定了几何公理化体系的基础。1984 年科学出版社出版的吴文俊的专著《几何定理机器证明的基本原理》(以下简称《原理》)一书，可以说是奠定了几何机械化体系的基础。它可以与《几何基础》媲美，成为机械化数学的典范著作。

《原理》的著者吴文俊教授是我国当代杰出的数学家，他将研究成果与对数学的深刻理解融为一体，用自己创立的机器证明方法，按照机械化的思想，重整几何体系。全书结构精巧，论述清晰，理论的发展也是循序渐进，深入浅出。不论作为报道成果的专著，还是作为教学参考书，不论对专门从事机械化数学的理论科研人员，还是对仅想了解机器证明基本方法的数学和计算机科学工作者，《原理》都是一本值得一读的好书。

最早提出数学定理机械化证明想法的，可以追溯到莱布尼兹 (Leibniz)，而首先给出其明确形式并致力于其证明的是本世纪初的 Hilbert 学派，但也仅限于不自觉地指出一些结果，并无发展成机械化体系的趋势。原因之一是，当时还没有行之有效的机械化方法和实施机械化方法的机器。Hilbert 的主要目的是想证明古典分析公理体系的协调性，而这一目的很快就被哥德尔 (Gödel) 证明是不可能的。以后的探讨可分为两个方面，一是对限制更多的系统给出判定规则；另一是证明某些系统的不可判定性。前者最强的结果归功于塔斯基 (Tarski)，1948 年他证明了实闭域的判定问题，从而给出了初等几何定理的机械化判定。但是 Tarski 的方法及后人的改进算法都极其繁复而无法实现。实际上，在 70 年代以前的机器定理证明中，各类方法也都只能证明数论和代数中的某些微不足道的定理，几何定理机器证明的发展更是步履蹒跚而一直停留在理论上。

直到 1977 年，吴文俊从构造性数学的观点出发，依据完全不同的原理给出了一类几何定理的机械化判定方法，才使机器证明和发明艰深的数学定理成为现实可行，吴的方法因其在机器定理证明领域内所占有的绝对优势，而成为当今最受重视的机械化方法之一。国外称之为吴氏方法，而相应的几何称为吴氏几何。

《原理》一书于 1982 年写成，它不包含以后的各类结果，该书仅引入几何的机械化体系，讨论机器证明的基本原理。

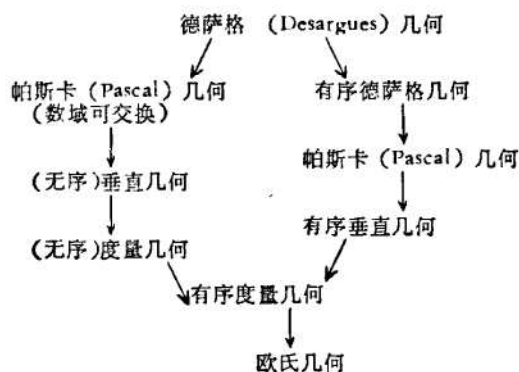
《原理》一书共分 6 章，前两章遵照机械化的线索引进数系和公理，发展机械化体系，以后各章逐次阐述各种几何的机械化定理。

几何机械化的基本思路是建立公理体系；通过代数化建立代数方程，再通过机械化建立机

械化几何。沿着这条路线,我们看一下《原理》一书的几点特色。

几何定理的传统证明,是对每一定理去想一巧妙的方法,这与寻求一般性方法的机械化思想不相适应,为此需要引进数系,建立坐标系统,用代数方程来描述几何图形,这是机械化的第一步,称为几何问题的代数化。Hilbert 将公理体系的协调性归结到数系统的协调性也正是通过几何的代数化来实现的。但通过几何代数化来证明定理似乎仅是想法而很少有实施。公理化历来依然是定理证明遵循的基本方法,而代数化主要在于用坐标和方程去刻画点线面之类的几何对象以建立起它们之间的代数关系。《原理》一书将问题代数化则是为了达到机械化的目的。为此该书按照不同的原则引入公理,将可机械化的几何由简及繁顺次给出,推迟引入影响机械化的公理,抛弃妨碍机械化的公理,而这又不影响到几何的本质。

吴氏几何最大的特点在于对次序公理的处理,次序在代数上即意味着不等式,而不等式的机械化处理要复杂得多。但涉及次序关系的定理并不多见,正如《原理》中所指出的“在一些现代几何如代数几何中,主要考虑的是复数域或特征为零的任意数域,根本不存在任何次序关系,即使在有次序关系的几何中,真正涉及次序关系的几何定理也并不占主要地位。凡此种说明在从公理出发建立几何时,次序关系有必要退居较次要的地位”。因此,问题的关键在于如何不依赖次序概念独立引进垂直,全合及其它度量概念以建立各种无序几何。吴氏几何给出了完整的无序几何体系。各种几何的隶属关系图示如下:



《原理》中重点证明了帕斯卡 (Pascal) 几何,无序垂直几何,无序度量几何是可机械化的,所有有序几何中不牵涉次序关系的定理也都是可机械化的,并且有现实可行的算法。这些算法所处理的定理主要是等式型的,即当几何的附属数域为一可换域,假设与终结都可以用多项式关系来表达的那类定理。这一问题可归纳为如下。

机械化问题: 给定

$$H: \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{与 } C: g(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

其中  $H$  和  $C$  分别为表述定理假设和终结的代数方程,问题是给出一算法据此判定在若干附加条件之下  $C$  是否为  $H$  的推论。

《原理》的著者发展里脱 (Ritt) 的工作,创立了比较完备的代数几何构造性理论,给出了高效率的算法,从而完整地解决了上述机械化问题。

几何机械化涉及到的另一个基本问题就是公理体系的严密化。《几何基础》向来被认为是严密化公理体系的代表作,但欧几里德的定理证明方法实际上仍然不能达到逻辑上的严密无间,原因在于公理与定理的叙述往往隐含了一种没有明白说出的假设——所考虑的图形必须处于非退化情形。《原理》的著者首先注意到退化条件对公理体系严密化的影响,其机械化方法不仅能将定理的退化情形与一般情形区别开来,并可指出在退化情形定理成立与否。可见,《原理》所展示的吴氏几何才是具备严密化的体系,它不仅有完整的公理,而且对于其中每一定理又有机械的证明方法,在某种意义上说,机械化体系是更完备的几何体系。

《原理》还论述了其它非常用几何的机械化问题,如鲍耶-罗巴切夫斯基 (Bolyai-Lobachevsky) 双曲型平面几何,黎曼 (Riemann) 无序椭圆型平面几何及无序投影几何等等,指出它们都是可机械化证明的。《原理》中对超越函数的处理也是独具匠心,著者通过一些代数关系来反映超越函数的性质,用以证明超越函数的关系式及与之相关的几何问题。

《原理》侧重阐述几何机械化的基本理论,未罗列太多的实例,如结合后来大量的机器结果和将要出版的有关机械化方法应用方面的著作来读这本书,将更有所裨益。